UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

TEORIA DOS JOGOS, EXTERNALIDADES E BENS PÚBLICOS

Monografia submetida ao Departamento de Ciências Econômicas para obtenção de carga horária na disciplina CNM5420 – Monografia.

Por: Adriano de Amarante

Orientador: Prof. Ms. Álvaro Dezidério Luz

Área de Pesquisa: Teoria Econômica

Palavras-chaves:

1. **Teoria dos jogos**
2. **Bens públicos**
3. **Externalidades**

Florianópolis, julho de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

A Banca Examinadora resolveu atribuir a nota ___________ ao aluno Adriano de Amarante na disciplina CNM 5420 – Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Banca Examinadora:

____

Prof. Álvaro Dezidério Luz, Ms.
Presidente

____

Prof. João Rogério Sanson, Dr.
Membro

____

Prof. Roque Caiero, Dr.
Membro

À minha esposa e amiga Luciana, ao meu filho Gabriel e aos meus pais Aldemar e Joana.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, cito minha família em especial a meus Pais, os quais ensinaram-me o caminho da persistência, humildade e dedicação. Destaco minha esposa e meu filho Gabriel por todo amor e incentivo. A Dona Júlia pela educação e o carinho dispensado a meu filho.

Ao companheiro e amigo Ademir Machado de Oliveira, por esclarecer e me auxiliar em questões metodológicas e operacionais.

Aos professores do departamento de Economia em especial a meu orientador Álvaro Dezidério Luz pelas horas dispensadas a este trabalho bem como a grande atenção e clareza ao corrigi-lo. Ao professor João Rogério Sanson pelos comentários e sugestões esclarecedores feitos a respeito dessa monografia. Ao também membro da banca, professor Roque Caiero pelas suas críticas construtivas que ajudaram a engrandecer este trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Economia em especial a Neusa e Mauro por todo carinho e amizade ao esclarecer as dúvidas administrativas.

Aos amigos e colegas que no decorrer do curso partilharam saberes e companhias nas horas difíceis bem como alegrias nas horas de descanso.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS E FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

1.1 A Contextualização do Problema

Nas diversas áreas da ciência econômica neoclássica o problema das externalidades sempre recebeu um lugar de destaque na literatura. Em livros de graduação das áreas de microeconomia, finanças públicas, economia ambiental, economia industrial, entre outras, é possível verificar capítulos específicos tratando de externalidades e bens públicos. No estudo destas obras, é um tanto raro encontrar um aprimoramento analítico da temática, a teoria básica se propõe a análises de equilíbrio[1], estando ausente à interação estratégica entre os agentes envolvidos no problema das externalidades e bens públicos.

O tema de pesquisa será uma resenha crítica à problemática das externalidades e bens públicos utilizando a teoria dos jogos, já que modelos tradicionalmente abordados não prevêem a interação estratégica entre os agentes envolvidos. Utilizar a teoria dos jogos para explicar os problemas de externalidade torna a análise mais robusta. A análise das externalidades e dos bens públicos via teoria dos jogos está praticamente ausente em livros de nível básico e ou intermediário[2]. Neste contexto, o presente trabalho busca identificar quais modelos do instrumental da teoria dos jogos que possuem aplicação teórica e prática na análise das externalidades e dos bens públicos?

[1] Pode-se verificar que na análise de equilíbrio parcial apresentada nos livros intermediários e de graduação, geralmente, são apresentados modelos teóricos que não envolve mais de um setor econômico. Por conseguinte, os modelos de análise de equilíbrio geral envolvem mais de um setor da economia, porem, os agentes de cada setor têm uma conduta independente à estratégia dos outros agentes envolvidos no modelo.
[2] Principalmente, em livros ou artigos em língua portuguesa.

Neste sentido a importância dos temas que envolvem a teoria das externalidades e bens públicos para a sociedade moderna é evidente. Os prejuízos ambientais causados principalmente pela poluição e degradação dos recursos hídricos, os benefícios gerados pela preservação de áreas de mata atlântica e os benefícios gerados pelas despesas com educação e saúde pública são alguns exemplos de externalidades e bens públicos que fazem parte da realidade econômica e social. Neste contexto, justifica-se uma pesquisa teórica sobre modelos de interação estratégica ligados a estas questões.

Certamente, neste trabalho, não se propõe o esgotamento teórico da temática sugerida com a realização da monografia. No trabalho a ser realizado, pretende-se priorizar uma abordagem microeconômica e suas aplicações.

O tema abordado neste trabalho derivou do interesse teórico de descrever e entender a problemática das externalidades. A externalidade é o benefício ou o prejuízo derivado do consumo ou da produção de determinado bem ou serviço, gerado por um ou mais agentes econômicos sobre outros agentes econômicos. O benefício ou o prejuízo gerado é absorvido pelos agentes econômicos sem passar pelo mecanismo de preços do mercado. Segundo Coase (1960) o problema da externalidade está centrado na dificuldade de se impor direitos de propriedade sobre a mesma, dificultando a negociação entre as partes envolvidas no problema. De uma forma mais profunda, pode-se dizer que a dificuldade maior se focaliza no problema de mensuração do valor do prejuízo ou benefício externo, pois, como se pode delimitar direitos de propriedade sem que haja uma correta avaliação da externalidade.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Resenhar os modelos do instrumental da teoria dos jogos que possuem aplicação teórica e prática na análise das externalidades e dos bens públicos.

1.2.2 Objetivos Específicos

Apresentar as bases teóricas das análises das externalidades e dos bens públicos, e do instrumental da teoria dos jogos.

Identificar os modelos do instrumental da teoria dos jogos que possuem aplicação teórica e prática na análise das externalidades e dos bens públicos.

Elaborar uma resenha com os principais modelos de teoria dos jogos aplicados às externalidades e bens públicos.

1.3 Aspectos Metodológicos

O trabalho aqui realizado foi suprido por uma pesquisa bibliográfica. O material bibliográfico pesquisado e estudado foi puramente teórico.

A teoria dos jogos e a teoria das externalidades utilizam-se fundamentalmente de métodos matemáticos para a realização das análises teóricas. Os métodos matemáticos utilizados na economia partem de axiomas que caracterizam as funções de comportamento de variáveis econômicas. Ao se estudar uma questão específica como o caso das externalidades como aplicação da teoria dos jogos, pressupõe-se alguns axiomas gerais que moldem o comportamento das variáveis e funções dentro de um modelo que contemple uma interação entre as variáveis de escolha de cada agente.

Os procedimentos à realização do trabalho tiveram o seguinte ordenamento. Na primeira etapa fez-se uma pesquisa bibliográfica sobre a problemática das externalidades e bens públicos e sobre a teoria dos jogos. Em seguida realizou-se uma resenha teórica sobre os dois tópicos pesquisados. Na terceira etapa, foi realizado um levantamento bibliográfico da literatura que aborda a teoria dos jogos aplicada a teoria das externalidades e bens públicos. Na etapa 4, realizou-se uma resenha de alguns trabalhos pesquisados e estudados na terceira etapa. Por fim, algumas considerações finais sobre o tema pesquisado foram apresentadas.

Os trabalhos de Mueller (1989), Cornes & Sandler (1996) e Varian (1992) são as principais referências bibliográficas relacionadas diretamente ao tema de pesquisa outros materiais bibliográficos como Varian (2000) Pindyck & Rubinfeld (1994) e outros serviram de literatura de apoio para a teoria das externalidades e bens públicos. Por fim, outros autores como Rasmusen (1994), Gibbons (1992) deram suporte sobre o instrumental da teoria dos jogos.

No segundo capítulo será apresentado alguns conceitos e noções sobre a teoria dos bens públicos e externalidades e sobre a teoria dos jogos. No capítulo 3 serão apresentados os modelos teóricos de aplicação da teoria dos jogos a externalidade e bens públicos. Por fim, apresentar-se-á algumas conclusões e considerações finais.

2. BENS PÚBLICOS, EXTERNALIDADES E TEORIA DOS JOGOS

Neste capítulo tem-se o objetivo de fazer uma revisão teórica da problemática das externalidades, bens públicos e da teoria dos jogos. Os bens públicos e as externalidades são motivos suficientes à intervenção do Estado[3] na economia. Esses dois tópicos são identificados como falhas de mercado que geram ineficiências dentro do sistema de preços do mercado.

Portanto, antes de iniciar o debate sobre a interação estratégica envolvida nos problemas de bens públicos e externalidades, necessita-se fazer uma revisão teórica sobre estes dois tópicos. A seguir, faz-se uma revisão dos conceitos básicos da teoria dos jogos.

O capítulo está organizado da seguinte forma, as duas primeiras seções tratam dos bens públicos e das externalidades respectivamente e na ultima seção apresenta-se uma revisão da teoria dos jogos.

2.1. Bens Públicos

O mercado privado não deve ser um mecanismo eficiente para lidar com bens públicos, assim sendo alguns mecanismos como o voto, foram criados. Então, quando se passa de automóvel ou de ônibus por uma ponte que interliga dois estados[4], caminha-se pelas calçadas, faixas de segurança, praças ou quando se observa a beleza das praias, "áreas verdes" e ruas limpas, pode-se afirmar que na maioria dos casos citados tratam-se de

[3] O Estado, com a primeira letra maiúscula, refere-se a um conjunto de níveis de autoridades, sendo uma delas central, que juntas tem autonomia de decisões em seu território e sobre seus cidadãos.
[4] Isto se estende para o caso de países, municípios e distrito ou bairros.

algumas benfeitorias promovidas, na maioria das vezes, pelas autoridades públicas. Esses benefícios são gerados por intermédio do Estado, mas financiados pelos cidadãos contribuintes.

Muitas vezes reclama-se da eficiência dos serviços prestados pelo setor público. Musgrave (1980, p. 41) afirma que "o problema central consiste em estender ao setor público os princípios do uso eficiente dos recursos ...", ou seja, o problema é "... elaborar um mecanismo para o fornecimento de bens públicos que seja tão eficiente quanto possível; ...". A eficiência de mercado neste caso é parcialmente alcançada por meio da política orçamentária, que depende dos vários representantes políticos. A solução econômica para o caso dos bens públicos talvez seja inviável ou inadequada, mas isso também acontece no setor privado visto que as imperfeições de mercado revelam ineficiências na provisão e no consumo de bens e serviços privados.

Whynes & Bowles (1982, p. 85) destacam que uma das causas do "fracasso" do mercado é o problema dos bens públicos. Uma característica do bem público, apresentada por Samuelson (1954, p. 387), é a de que em um dado nível de oferta do bem "coletivo", o consumo deste bem por um indivíduo não afeta a sua oferta para outros indivíduos.

O governo oferece uma determinada quantidade de bem público aos membros da sua comunidade. Esta quantidade de bens e ou serviços[5] é a mesma para todas as pessoas, porém, cada pessoa atribui um valor diferente a este bem público.[6]

O bem público além de gerar externalidades positivas, ele tem características peculiares em relação ao bem privado. Varian (1992, p. 414) aponta que o consumo do bem privado afeta somente um agente econômico, ao passo que cada indivíduo pode consumir diferentes quantidades do bem, mas uma dada unidade do bem consumida por um indivíduo não pode ser consumida mais de uma vez. O indivíduo ao consumir uma determinada unidade do bem exclui outros indivíduos de consumir esta mesma unidade do bem. Assim sendo, um bem é exclusivo quando as pessoas podem ser excluídas do consumo deste; e um

---

[5] Utilizarei, desde já, por conveniência, as palavras bens e serviços como sinônimos.
[6] Cabe aqui um questionamento, será que as pessoas revelam o quanto estão dispostas a pagar pelo bem público? O problema do "carona" impede que as pessoas revelem suas verdadeiras preferências, ou seja, o carona não revela o verdadeiro valor que está disposto a pagar pelo bem público na tentativa de se apropriar

bem é rival[7] quando o consumo de uma pessoa reduz o montante de bens ofertado para outras pessoas. Portanto, os bens privados são rivais e excludentes.

Varian (1992, p. 414 e 415) e Pindyck & Rubinfeld (1994, p. 871-873) caracterizam o consumo dos bens públicos puros como não-rival e não-excludente. Já os chamados "clubes" são não-rivais, pois se mantém com a oferta fixa independentemente do consumo, mas podem ser excludentes, tendo em vista a possibilidade de impor um mecanismo de exclusão[8]. Outro tipo de bem é aquele em que o seu consumo é não-excludente e rival ao mesmo tempo, como é o exemplo das estradas em horário de transito intenso em que todos podem passar por ela, mas o uso de uma pessoa reduz o espaço utilizado pelas outras pessoas e o espaço utilizado por ela mesma. Finalmente, existem bens privados que podem ser oferecidos pelo setor público[9], como é o caso da educação que é tratado como um bem público devido aos benefícios que ela gera a toda sociedade, ou seja, este bem gera uma espécie de externalidade positiva[10].

2.1.1 Nível de provisão eficiente do bem público

Uma questão a ser levantada seria a de como prover um bem público de forma eficiente? Uma resposta direta e conveniente seria quando a soma dos benefícios marginais é maior ou igual ao custo marginal de prover este bem, consegue-se obter uma provisão eficiente do bem público.

Para visualizar melhor a viabilidade da oferta de um bem público toma-se um exemplo simples[11] de dois consumidores, e dois bens, um bem de consumo privado e um bem de consumo público. Onde x_i é um bem privado e pode ser entendido como parte da

de um maior benefício líquido que o bem lhe gera, portanto se todas as pessoas souberem disso elas agiram como carona. Este problema será aplicado em um jogo no capítulo 3.

[7] O montante de bens rivais tem a propriedade de serem subtraídos a cada unidade consumida. Samuelson (1955) também faz uma exposição gráfica sobre a teoria dos bens públicos.

[8] Um exemplo é o da TV por radiodifusão, em que é possível submete-la a um mecanismo decodificador de ondas de rádio para uma dada programação de TV.

[9] Também chamados de "bens de mérito", por sua importância na melhoria do bem-estar social.

[10] Este assunto será abordado na seção posterior que trata de externalidades.

[11] Exemplo descrito por Varian (1992, p. 415 e 416).

renda do indivíduo que é destinada ao consumo privado. O bem público G pode ser definido como o gasto destinado à provisão de algum bem público, tal como a iluminação pública ou a defesa nacional. Os indivíduos são dotados de renda, m_i, da qual parte desta renda, g_i, é destinada ao bem público, que é a contribuição de cada agente para a provisão desse bem. Os dispêndios com os bens privados, caso o indivíduo i colabore com g_i para o bem público, é dado por $x_i = m_i - g_i$.

A função utilidade do indivíduo i, $u_i(G,x_i)$, é estritamente crescente para ambos os bens. O montante discreto do bem público é provido caso a soma das contribuições dos indivíduos supere ou ao menos iguale aos seus custos, c, portanto a provisão do bem público para duas pessoas segue a seguinte condição:

$$G = \begin{cases} 1 & \text{se } g_1 + g_2 \geq c \\ 0 & \text{se } g_1 + g_2 < c \end{cases} \qquad (1)$$

Esta condição resume a tecnologia disponível para que o bem público seja ofertado. O bem público é provido somente se a soma das contribuições seja ao menos igual a c. A decisão de providenciar o bem público deverá ser Pareto eficiente somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$u_i(1,\, m_i - g_i) > u_i(0,\, m_i) \quad \begin{cases} u_1(1, m_1 - g_1) > u_1(0,\, m_1) \\ u_2(1, m_2 - g_2) > u_2(0,\, m_2) \end{cases} \qquad (1a)$$

$$g_1 + g_2 \geq c \qquad (1b)$$

Toma-se ri como o montante máximo de bem privado que o agente i estaria disposto a abrir mão para comprar uma unidade do bem público. Isto seria a máxima "disposição a pagar" ou "preço de reserva" do consumidor i ao consumir uma determinada quantidade do bem público. Por definição r_i precisa satisfazer a seguinte equação

$$u_i(1, m_i - r_i) = u_i(0, m_i). \tag{2}$$

Aplicando esta definição na condição (1a), tem-se $u_i(1, m_i - g_i) > u_i(0, m_i) = u_i(1, m_i - r_i)$. Desde que a utilidade seja estritamente crescente em consumo privado, então equivale dizer que

$$m_i - g_i > m_i - r_i \begin{cases} m_1 - g_1 > m_1 - r_1 \\ m_2 - g_2 > m_2 - r_2. \end{cases}$$

Somando as desigualdades para os indivíduos 1 e 2 tem-se

$$r_1 + r_2 > g_1 + g_2 \geq c \tag{3}$$

Portanto, se prover o bem público gera uma melhoria de Pareto, tem-se que $r_1 + r_2 > c$, ou seja, a soma dos "desejos a pagar" pelo bem público precisa exceder os custos de provê-lo. Assim sendo, segundo a desigualdade (3) obtem-se novamente que

$$u_i(1, m_i - g_i) > u_i(0, m_i).$$

Segundo Varian (1992, p.416) a seguinte regra sintetiza a discussão: o melhoramento de Pareto de prover um bem público discreto acontece se e somente se a soma das "disponibilidades a pagar" excedem o custo de provisão do bem.

O caso contínuo

No caso de dois consumidores com dotação $m_i = x_i + g_i$, para i = 1, 2, onde x_i é a parcela da renda destinada ao consumo do bem privado do consumidor i e g_i é a parcela da renda do consumidor i destinada a contribuir com a provisão do bem público G ao custo de $c(G)$ e de utilidade $u_i(G, x_i)$, a condição que define a provisão eficiente de Pareto do bem público é dada pelo seguinte problema de otimização resolvido por Varian (2000):

$$\max_{x_1, x_2, G} \quad u_1(G, x_1)$$

$$\textit{sujeito a} \quad u_2(G, x_2) = \bar{u}_2$$

$$x_1 + x_2 + c(G) = m_1 + m_2$$

No problema acima soma-se as restrições, tendo em vista que $g_1 + g_2 = c(G)$[12]. A expressão do lagrangiano é dada por:

$$L = u_1(x_1, G) - \lambda[u_2(x_2, G) - \bar{u}_2] - \mu[x_1 + x_2 + c(G) - m_1 - m_2]$$

Resolvendo o lagrangiano, consegue-se estabelecer as seguintes Condições de Primeira Ordem (CPO):

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(G, x_i)}{\partial x_1} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda \frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial x_2} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial u_1(G, x_i)}{\partial G} - \lambda \frac{\partial u_2(G, x_2)}{\partial G} - \mu \frac{\partial c(G)}{\partial G} = 0$$

depois de algumas manipulações algébricas obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial u_1(G,x_i)/\partial G}{\partial u_1(G,x_i)/\partial x_1} + \frac{\partial u_2(G,x_2)/\partial G}{\partial u_2(G,x_2)/\partial x_2} = \frac{\partial c(G)}{\partial G} \qquad (1)$$

pode-se então dizer que $TMS_1 + TMS_2 = CMg(G)$, dado que a tecnologia de produção é resumida pela função de custos do bem público pode-se apresentar a expressão como $TMS_1 + TMS_2 = TMT$, onde TMS e TMT são respectivamente a taxa marginal de substituição e a taxa marginal de transformação do bem privado em bem público. Samuelson (1954, p. 388) relata as condições ótimas para provisão de bens, em que uma delas trata-se da igualdade entre a soma das taxas marginais de substituição do bem público e da taxa marginal de transformação.[13] Uma condição ótima expandida – mais geral – para a provisão de um bem público de custo $c(G)$ é apresentada abaixo como

$$TMS_1 + TMS_2 + \ldots + TMS_i + \ldots + TMS_n = TMT \qquad (2.a)$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} TMS_i = TMT \qquad (2.b)$$

Esta condição é apresentada por Samuelson (1954). Esta condição para dois consumidores pode ser observada na figura 1 onde o ponto E (q*,p*) é alcançado pela seguinte igualdade $TMSa + TMSb = TMT \cong CMg(G)$.

[12] Esta é uma condição que viabiliza a provisão do bem público, pode ser expressa como uma desigualdade como $g_1 + g_2 \geq c(G)$.

[13] Ver também Samuelson (1955).

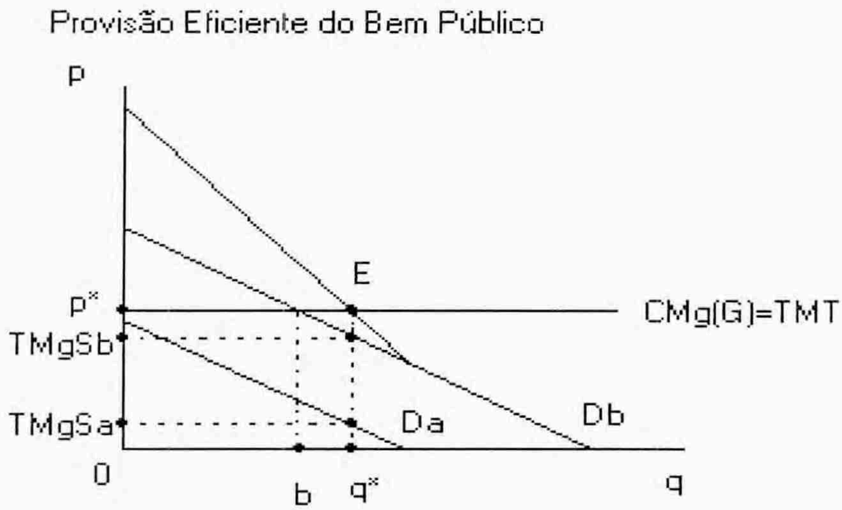

Figura 1 – Provisão eficiente do bem público

A oferta pública de bens e serviços encontra dificuldades, já apresentadas anteriormente, para encontrar um nível eficiente de bens públicos. Portanto, supõe-se que os indivíduos revelem suas verdadeiras preferências por bens públicos, identificando as demandas individuais.

O eixo vertical p descreve o plano de possibilidades de preço do bem público e o eixo horizontal q descreve os níveis de bens públicos. A maneira de determinar o nível ótimo de bens públicos é através da igualdade entre a soma vertical das demandas individuais[14], Da e Db, e o custo marginal da provisão deste bem. Como é graficamente demonstrado, o nível eficiente de bens públicos q^* é determinado pelo ponto $E(q^*, p^*)$. A cada nível de consumo do bem público q, as curvas de demanda indicam o benefício marginal obtido pelo indivíduo a (em Da) e pelo indivíduo b (em Db).

[14] No caso dos bens públicos a soma se dá verticalmente, pois, seu consumo é não-rival e a quantidade total ofertada do bem é consumida por ambos.

2.2. Externalidades

Quando as ações de um agente afetam diretamente o ambiente – o conjunto de possibilidades de consumo ou produção – de outro agente, pode-se dizer que existe uma externalidade. Em uma externalidade de consumo, a utilidade de um consumidor é afetada diretamente pelas ações de um outro agente.[15] Na externalidade de produção o conjunto de possibilidades de produção de uma firma é diretamente afetado pelas ações de outro(s) agente(s).[16] A externalidade de produção ou consumo pode ser negativa quando gera prejuízos ou positiva quando gera benefícios, para outros agentes.

Na presença de economias e deseconomias externas– externalidades – o equilíbrio de mercado geralmente será ineficiente, visto que a análise tradicional do equilíbrio desconsidera as externalidades em seus modelos de equilíbrio. Faz-se necessário um reexame de várias maneiras alternativas de alocar os recursos que leve a um resultado eficiente.

Segundo Varian (1992, p. 432) o Primeiro Teorema do Bem-estar Econômico não leva em consideração a presença de externalidades. Afirma que a razão disso é que existem coisas que as pessoas se interessam, mas não são precificadas pelo mercado.

Na ausência de externalidades o mecanismo de mercado era capaz de alcançar alocações eficientes de Pareto, mas, cabe perguntar como alcançar uma alocação eficiente na presença de externalidades. Varian (2000, p. 616) afirma que os problemas com as externalidades aparecem devido à dificuldade de se definir os direitos de propriedade.

Dito isso, pode-se comparar graficamente o equilíbrio socialmente eficiente ao equilíbrio de mercado com a presença de externalidade. Veja:

---

[15] Neste caso a externalidade de consumo pode ser gerada por consumidores, por firmas ou até mesmo pelo setor público, sobre o consumo de outros agentes. Um exemplo disso é aquele em que alguns consumidores são afetados em restaurantes e outros ambientes fechados pelo consumo de tabaco de outros consumidores. Outro exemplo é a poluição de um rio, causada por uma firma, que abastece uma comunidade de água.

[16] Um exemplo clássico é o da produção de fumaça por uma usina de aço que afeta diretamente as possibilidades de produção de roupas limpas de uma lavanderia. Um outro exemplo bastante utilizado de externalidade de produção são os efeitos positivos gerados pela proximidade de um apiário a um pomar de

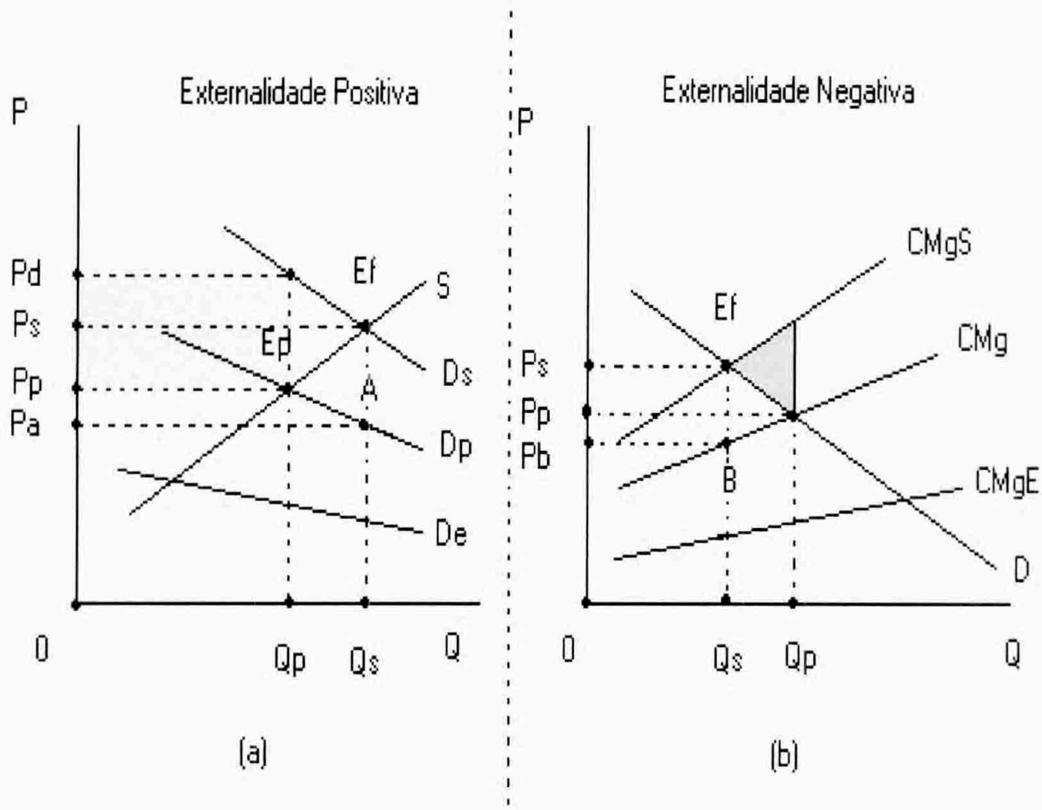

Figura 2 – Externalidades positiva e negativa

A figura 2.a apresenta o caso de uma externalidade positiva onde o bem Q apresenta três tipos de demanda que refletem o benefício marginal externo em De, o benefício marginal privado dado por Dp e por fim o benefício marginal total ou social, que é a soma vertical de De e Dp, dado por Ds. Analisa-se o caso em que o agente maximiza o seu benefício ao igualar o custo marginal ou a oferta do bem ao benefício marginal que o bem lhe gera, ou seja, o indivíduo ou a firma maximiza a sua utilidade ou o seu lucro quando igualam a oferta do bem a sua demanda privada , Dp = S, obtendo a alocação E (Qp, Pp) que não leva em conta o beneficio marginal externo gerado pelo consumo e ou pela produção[17] do bem. Com a suposta possibilidade de se medir os benefícios externos,

macieiras, onde ambas as produções recebem os efeitos positivos. Levando em consideração que a externalidade de produção também pode ser gerada por qualquer tipo de agente e não somente por firmas.

[17] Pode ser feito duas analogias tanto a figura 1.a quanto a figura 1.b, uma sob a ótica da produção, em que ao se produzir gera-se um benefício ou custo externo, e a outra sob a ótica do consumo pelo qual ao se consumir determinado produto pode-se expor outros agentes a benefícios ou custos gerados pelo consumo privado (pode-se citar dois exemplos antagônicos, o consumo de cigarro e o consumo de plantas).

consegue-se obter a demanda social do bem e assim igualar esta demanda, Ds, a oferta S, Ds = S, obtendo o ponto Ef (Qs,Ps) em que indica uma alocação eficiente de Pareto para o bem. A área retangular em amarelo indica o valor total do benefício externalizado ao se produzir ou consumir Qp.

A figura 2.b mostra o caso de uma externalidade negativa onde a produção do bem Q reflete um custo marginal privado, CMg, e expõe outros agentes a custos, estabelecendo por suposição um custo marginal externo linear dado por CMgE, que somados obtém-se um custo marginal social, CMgS. Seguindo a mesma lógica da figura 2.a, no ponto (Qp, Pp) indica uma alocação privada que pela ótica social é ineficiente, onde a área em azul é o custo social medido pela diferença entre o custo marginal social e o benefício marginal, D. O ponto (Qs, Ps) estabelece uma alocação eficiente de Pareto, onde o custo marginal social é igual ao benefício marginal, CMgS = D.

A apresentação que se segue mostra um modelo baseado em Varian (1992) a despeito das externalidades negativas de produção geradas pela firma 1 sobre firma 2, que pode ser reescrita sob a forma da figura 1.b. A firma 1 produz o bem x para vende-lo em um mercado competitivo. A firma 2 sofre uma externalidade $e(x)$ com a produção de x. Portanto, o lucro das duas firmas é dado por:

$$\pi_1 = px - c(x) \qquad \text{e} \qquad \pi_2 = -e(x) \tag{1}$$

Assume-se que as funções de custo são crescentes e convexas. Ignora-se por simplificação o lucro obtido pela firma 2 em outras atividades. A firma 1 ignora a externalidade gerada pela sua produção do bem x e resolve o seguinte problema de maximização:

$$\max_x px - c(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \pi_1}{\partial x} = 0$$

Resolvida a maximização acima, onde $p = \partial c(x)/\partial x$, o montante de equilíbrio do produto, $x*$, tem que satisfazer a esta condição, ou melhor, $p* = c'(x*)$. Esta alocação privada é ineficiente sob a ótica social.

Para internalizar a externalidade, a firma 1 teria que computar o custo externo ao seu problema de maximização e assim subtraindo da sua receita, px, não só os seus custos privados, $c(x)$, mas também os custos imputados à outra firma. Tem-se então o seguinte problema de maximização de lucro da firma 1:

$$\max_{x} px - [c(x) + e(x)]$$

Pelas condições de primeira ordem (CPO), $p = c'(x) + e'(x)$, o preço iguala-se ao custo marginal social, e agora o montante de equilíbrio do produto, x_E, tem que satisfazer a condição $p_E = c'(x_E) + e(x_E)$, em que $p_E > p*$ e portanto a alocação ótima da produção passa a ser eficiente de Pareto.

2.2.1 Algumas soluções

O imposto pigouviano é uma das soluções para o problema das externalidades. A aplicação desse imposto procura corrigir esta má alocação levando-a para uma alocação eficiente de Pareto, ou do tipo *second-best*[18]. Suponha o mesmo problema acima, porém neste caso imputa-se um imposto t sobre a produção da firma 1 onde o lucro da firma passa a ser expresso por

$$\pi_1 = px - [c(x) + tx]$$

Sabendo do encargo deste imposto, firma 1 resolve o seguinte problema de maximização:

$$\max_x px - [c(x) + tx]$$

A CPO é dada por $p = c'(x) + t$, em que cabe a autoridade fiscal fixar $t = e'(x)$, levando a firma 1 a escolher $x = x_E$. O problema deste tipo de solução é que a autoridade tributária deve ter conhecimento da função $e(x)$. Para se resolver o problema distributivo é necessário que a autoridade fiscal repasse tx para a firma 2, e assim zerando o seu prejuízo.

Outro tipo de solução baseado em Varian (1992) é a tentativa de se resolver o problema da externalidade através da criação de um mercado para o bem ou "mal" gerado por uma ou mais firmas. Segue-se nas mesmas bases do modelo anterior, em que a firma 1 gera uma externalidade negativa ou um "mal" para a firma 2. Cada unidade produzida desta externalidade tem seu preço, r, expresso no mercado de "males". Assim, se x unidades do produto são produzidos, x unidades de "males" inevitavelmente são produzidos. O preço de mercado do "mal" é r, então a firma 1 decidira o quanto de mal ela quer vender, x_1, e a firma 2 decidirá o quanto ela quer comprar, x_2. Os problemas de maximização dos lucros tornam-se:

$$\max_{x_1} px_1 - [c(x_1) - rx_1] \qquad \text{e} \qquad \max_{x_2} - rx_2 - e(x_2)$$

Resolvendo o problema acima tem-se as CPO:

$$p + r = c'(x_1) \qquad \text{e} \qquad -r = e'(x_2)$$

No equilíbrio a demanda iguala-se a oferta, $x_2 = x_1$,então tem-se que $p = c'(x_1) + e'(x_2)$. É natural que r seja negativo, pois reflete uma externalidade negativa. Portanto, a firma 1 ao desejar produzir um "mal" terá que pagar $-rx_1$ para a firma 2 que equivale a receber $e'(x_2)x_2$.

Suponha, agora que a poluição e o produto não sejam produzidos em uma razão de "um pra um", ou seja o nível de produção do "mal" é determinado por uma variável y.

---

[18] A alocação do tipo *second-best* ou segundo melhor, é aquela a qual apresenta uma solução ótima na presença de uma distorção no mercado.

Assim, a firma 1 passa a produzir x unidades do bem e y unidades do "mal". A função de custo da firma é dada como $c(x, y)$, pois agora é determinada por x e y. Presumivelmente, aumentando y, a partir de zero, o custo de produção, x, se reduz, pois nesse caso a firma 1 não internaliza o "mal" gerado por ela. Na ausência de um mecanismo de controle de poluição o problema de maximização de lucro da firma 1 é

$$\max_{x,y} px - c(x, y),$$

Em seguida as condições de primeira ordem:

$$p - \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} = 0 \qquad ou \qquad p = \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \qquad \text{(a)}$$

$$0 - \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad ou \qquad 0 = \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} \qquad \text{(b)}$$

A firma 1 iguala o preço do "mal" ao seu custo marginal. Neste caso o preço de produzir o mal é igual a zero, portanto a firma 1 produzirá "males" até o ponto em que os custos de produção do bem são minimizados, visto que não há controle por parte das autoridades sobre a produção de y.

Assume-se, por conseguinte, a criação de um mercado de "males" (externalidade negativa), entre as firmas 1 e 2. Seguindo a mesma lógica dos problemas acima tem-se as seguintes maximizações de lucro:

$$\max_{x,y_1} px + ry_1 - c(x, y_1) \qquad e \qquad \max_{y_2} - ry_2 - e(y_2)$$

Segue-se então as seguintes CPO:

$$\max \pi_1 \quad \begin{cases} p - \dfrac{\partial c(x, y_1)}{\partial x} = 0 & ou \quad p = \dfrac{\partial c(x, y_1)}{\partial x} \\ \\ r - \dfrac{\partial c(x, y_1)}{\partial y_1} = 0 & ou \quad r = \dfrac{\partial c(x, y_1)}{\partial y_1} \end{cases}$$

$$\max \pi_2 \quad \left\{ -r - \dfrac{\partial e(y_2)}{\partial y_2} = 0 \quad ou \quad -r = \dfrac{\partial e(y_2)}{\partial y_2} \right.$$

Iguala-se a oferta à demanda, $y_1 = y_2$, para se obter um nível eficiente de x e y. Reescreve-se as CPO abaixo como:

$$\max \pi_1 \quad \begin{cases} p - \dfrac{\partial c(x, y^*)}{\partial x} = 0 & ou \quad p = \dfrac{\partial c(x, y^*)}{\partial x} \\ \\ r - \dfrac{\partial c(x, y^*)}{\partial y^*} = 0 & ou \quad r = \dfrac{\partial c(x, y^*)}{\partial y^*} \end{cases}$$

$$\max \pi_2 \quad \left\{ -r - \dfrac{\partial e(y^*)}{\partial y^*} = 0 \quad ou \quad -r = \dfrac{\partial e(y^*)}{\partial y^*} \right.$$

A firma 1 apresenta duas condições de maximização de lucro. A primeira informa que o lucro máximo é obtido quando o preço é igual ao custo marginal de produzir x, a segunda mostra que o lucro ótimo deve resultar da igualdade entre o preço do "mal", r, e o custo marginal de produzi-lo, que é um valor negativo[19]. Já a firma 2 apresenta uma condição de lucro máximo em que o negativo do preço do "mal" é igual a externalidade marginal sofrida pela firma 2, que é um valor positivo. Conclui-se que o custo marginal da firma 1 de produzir y^* multiplicado por -1 é igual ao custo marginal externo sofrido pela firma 2, devido a produção de y^* da firma 1, $e'(y^*) = -c'(y^*)$.

Segundo Varian (1992) a crítica a esta solução é que o mercado de "males" geralmente é muito restrito e pode gerar imperfeições. Uma outra sugestão seria estabelecer direitos de propriedade bem definidos na tentativa de internalizar as externalidades.

2.2.2 Condições de eficiência na presença de externalidades

Varian (1992) apresenta as condições de eficiência geral na presença de extrnalidades, por intermédio de um modelo de dois bens, x e y, e dois agentes, 1 e 2, onde a utilidade de cada agente sofre a influencia do consumo de x por parte do outro agente, o que não acontece no consumo do bem y. Existem $\bar{x}$ unidades disponíveis do bem x e $\bar{y}$ unidades do bem y. A utilidade do agente 1 é dada por $u_1(x_1, x_2, y_1)$, já a utilidade do agente 2 é descrita como $u_2(x_1, x_2, y_2)$. Dado que ambos os agentes interagem, escolhe-se uma das duas utilidades como função objetivo.[20] A partir disto resolve-se o seguinte problema de maximização pelo método de Lagrange:

$$\max_{x_1, x_2, y_1, y_2} \quad u_1(x_1, x_2, y_1)$$

$$\begin{aligned} \textit{sujeito a} \quad & u_2(x_1, x_2, y_2) = \bar{u}_2 \\ & x_1 + x_2 = \bar{x} \\ & y_1 + y_2 = \bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{lagrangiano}: \quad & \mathcal{L} = u_1(x_1, x_2, y_1) - \lambda_1[u_2(x_1, x_2, y_2) - \bar{u}_2] - \\ & - \lambda_2[x_1 + x_2 - \bar{x}] - \lambda_3[y_1 + y_2 - \bar{y}] \end{aligned}$$

Resolvendo as condições de primeira ordem, tem-se:

---

[19] Visto que quanto mais se produz este "mal" menor é o custo de produção da firma 1.

[20] Varian (1992, p.438) monta este problema maximizando a soma ponderada das funções utilidade sujeita as restrições de x e y.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \lambda_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \lambda_2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \lambda_3 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial y_2} - \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = \lambda_3 \qquad (4)$$

$$\textit{dividindo (3) por (4):} \quad \Rightarrow \quad -\lambda_1 = \frac{\partial u_1 / \partial y_1}{\partial u_2 / \partial y_2} \qquad (5)$$

Dividindo a condição (1) pela (3) e a (2) pela (4) obtém-se respectivamente

$$\frac{\partial u_1 / \partial x_1}{\partial u_1 / \partial y_1} - \lambda_1 \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\partial u_1 / \partial y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\partial u_2 / \partial y_2} + \frac{\partial u_2 / \partial x_2}{\partial u_2 / \partial y_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Na seqüência, substituí-se a condição (5) nas equações acima para se obter as seguintes condições de eficiência:

$$\frac{\partial u_1 / \partial x_1}{\partial u_1 / \partial y_1} + \frac{\partial u_2 / \partial x_1}{\partial u_2 / \partial y_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u_1 / \partial x_2}{\partial u_1 / \partial y_1} + \frac{\partial u_2 / \partial x_2}{\partial u_2 / \partial y_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Estas condições de eficiência mostram que a soma das taxas marginais de substituição é igual a uma constante. Em suma estas condições são similares as condições de eficiência obtidas para um bem público. O agente 1 ao aumentar o consumo de x_1, ele terá que levar em conta o quanto o agente 2 esta disposto a pagar por este bem e o mesmo acontece com o agente 2 em relação ao bem x_2. Portanto, se cada agente enfrenta um preço apropriado pelas suas ações, o equilíbrio de mercado é levado para uma condição de eficiência.

2.3. Noções sobre a Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos é amplamente utilizada na análise de modelos econômicos que envolvem dois ou mais agentes econômicos que tomam decisões interdependentes. Gibbons (1992, xi) afirma que "*game theory is the study of multiperson decision problem.*"[21]

Esta seção será organizada da seguinte forma, primeiro definem-se alguns elementos fundamentais para uma modelagem aceitável de um jogo. Na segunda parte da seção, descreve-se algumas características de um jogo estático com informação completa e conceitua-se o *Equilíbrio de Nash.* Nas subseções seguintes discute-se as principais características e conceitos de equilíbrio no contexto dos jogos dinâmicos com informação completa.

2.3.1 Principais elementos de um jogo

Nesta seção pretende-se relacionar algumas definições fundamentais para a modelagem em teoria dos jogos. Rasmusen (1994, p.10) destaca que os elementos essenciais de um jogo são os jogadores,as ações,as informações,as estratégias,os ganhos, a solução e os equilíbrios. Porém, serão apresentados os elementos imprescindíveis e comuns aos três tipos de jogos apresentados nas seções seguintes. Os jogadores, as ações e estratégias e os payoffs ou ganhos são os elementos a serem apresentados a seguir.

A – Jogadores

A teoria dos jogos aplicada a economia, em síntese, define os *jogadores* como agentes que fazem escolhas e ou elaboram e executam estratégias a fim de atingir um objetivo. Pressupõe-se, neste caso, que os jogadores são perfeitamente racionais. Segundo Rasmusen (1994, p. 10) os *jogadores* são agentes que tomam decisões, onde cada agente

[21] *Trad.* "a teoria dos jogos é o estudo de problemas de decisão multi-pessoais".

tem uma meta, maximizar sua utilidade pela escolha de ações. Alguns exemplos de agentes são indivíduos, contribuintes, consumidores, firmas, estados, nações, instituições, administradores, economistas, coalizões, etc.

B – Ações

Um *conjunto de ações*, A_i, é uma totalidade de ações possíveis a serem escolhidas por um dado jogador *i*. A *ação* ou *movimento*, a_i, é um ato do jogador *i* que é determinado pela sua escolha.

C – Estratégias

A *estratégia* é um plano de ação que determina a conduta a ser seguida dada às informações e às condições preestabelecidas do jogo. Em um jogo estático com informação completa a estratégia de um jogador depende do seu conjunto de possibilidades de ações e do conjunto de possibilidade de ações do seu rival, dado uma matriz ou um conjunto de possibilidades de *payoffs* de todos os participantes do jogo. O espaço das estratégias é um conjunto de estratégias possíveis. Em um jogo seqüencial a *estratégia* do jogador *i*, s_i, é a descrição de uma seqüência de ações escolhidas pelo jogador *i* em cada instante do jogo.

D – Payoffs ou ganhos

O *payoff* ou ganho do jogador *i* pode ser entendido como a utilidade recebida u_i, depois de realizada a combinação da estratégia escolhida por ele, s_i, com as estratégias $[s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ... s_n]$, dos *n-i* jogadores. Já o conjunto de *payoffs* de um jogo é a totalidade de possíveis recebimentos dados a combinação dos espaços das estratégias de cada jogador.

Todos estes elementos mencionados podem ser utilizados sem perda de generalidade nas propostas de modelagem por intermédio da teoria dos jogos.

2.3.2 Jogos Estáticos com Informação Completa

A teoria dos jogos pode apresentar diversos tipos de modelos. Os jogos estáticos são apresentados com maior freqüência dada à simplicidade e a facilidade na modelagem. Em tais modelos os vários ou poucos jogadores escolhem as suas estratégias simultaneamente em um único lance que encerra o jogo indicando uma ou mais estratégias de equilíbrio.

O *equilíbrio de Nash* pode ser entendido como um combinado de estratégias de *n* jogadores s* = [s_1*, ..., s_n*] para um dado jogo, tendo em vista ser a melhor resposta de cada jogador para o jogo, $u_i(s_i*, s_{-i}*) \geq u_i(s_i', s_{-i}*)$. Segundo Mas-Colell, Whinston e Green (1995, p.246): "Em um equilíbrio de Nash, a escolha de estratégia de cada jogador é a melhor resposta para as estratégias realmente jogadas pelos seus rivais."

Em suma, cada jogador escolhe a melhor resposta dada a melhor resposta dos jogadores rivais. O jogador *i* escolhe uma ação dado a melhor resposta do jogador oponente, ou seja, a melhor resposta do jogador *i*, a_i^*, é função da expectativa da melhor resposta do jogador *j*, assim $a_i^*(a_j^e)$, a partir disto a função de reação do jogador *j* é dada de forma análoga por $a_j^*(a_i^e)$, onde no equilíbrio do jogo estático simétrico de informação completa, $a_i^* = a_i^e$ e $a_j^* = a_j^e$.

2.3.3 Jogos Dinâmicos com Informação Completa

Existe uma diferença entre jogos repetidos e os jogos seqüenciais. Nos jogos repetidos um jogo padrão (jogo constituinte) é jogado repetidamente, onde os resultados dos estágios precedentes são previamente observados antes de começar o próximo estágio. Já, nos jogos seqüenciais o resultado só pode ser observado após a realização do último estágio do jogo. Nesta seção, primeiramente são apresentados a estrutura e os conceitos relacionados aos jogos repetidos e em seguida descreve-se os principais conceitos e o funcionamento básico do jogo seqüencial. Para facilitar a análise do jogo repetido, ele será classificado em jogos finitos repetidos e jogos infinitamente repetidos.

A – Jogos repetidos e finitos

Em um jogo finito o resultado do jogo subseqüente depende do resultado do jogo anterior, portanto, o resultado do jogo inteiro depende do resultado de todos os jogos anteriores. Assim, um equilíbrio de Nash do ultimo estágio do jogo depende do resultado do penúltimo estágio do jogo que depende do antepenúltimo estágio e assim por diante. Um jogo $G = \{A_1, \ldots, A_n; u_1, \ldots, u_n\}$, como se denota um jogo estático, pode ser repetido T vezes. Assim, denote *G*(*T*) como um jogo finitamente repetido em que o jogo é jogado T vezes, com o resultado de todos os jogos precedentes observados antes de iniciar o jogo considerado. Os *payoffs* para *G*(*T*) são simplesmente a soma dos *payoffs* dos T jogos. Assim, Gibbons (1992, p.84) estabelece a seguinte proposição: *Se o jogo G tem um único equilíbrio de Nash então, para qualquer jogo finito T, o jogo repetido G(T) tem um único resultado perfeito em sub-jogo: o equilíbrio de Nash de G é jogado em todo o jogo.*

Nos jogos repetidos e finitos se caracterizam pelo conhecimento comum dos jogadores de quantos jogos de mesmas regras, estrutura, combinação de ganhos e estratégias, serão jogados. Logo, ambos os jogadores saberão quando acaba o jogo e quais todos os possíveis resultados.

B – Jogos indefinidamente repetidos

No contexto dos jogos repetidos infinitamente, os equilíbrios de Nash podem permitir resultados ótimos. Segundo Gibbons (1992, p.88) como no contexto dos jogos finitos, a questão central é que as ameaças ou promessas sobre a conduta futura podem influenciar a conduta atual. No horizonte infinito as estratégias punitivas asseguram o comprometimento recíproco de cooperação entre os jogadores, ou seja, a estratégia de punição é um elemento do conjunto dos equilíbrios de Nash perfeito em subjogos do jogo infinitamente repetido que proporciona o menor payoff para o jogador rival. A punição impede que o jogador rival deixe de cooperar por um determinado período.

Os indivíduos tomam suas decisões baseadas nos *payoffs* atual e futuro e para atualizar o valor futuro dos *payoffs* a cada período[22] utiliza-se um fator de desconto δ. A introdução do fator de desconto é crucial para distinguir e comparar os *payoffs* dos jogadores em uma seqüência infinita de jogos constituintes.

Aplicando o fator de desconto sobre uma seqüência infinita de *payoffs* $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ obtêm-se a seguinte expressão do valor presente:

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t \qquad (1)$$

Suponha que os *payoffs* de cada período sejam idênticos, então a equação (1) do valor presente (*VP*) se resume a $VP = \pi[1/(1-\delta)]$ - caso em que $\delta < 1$.

Segundo Gibbons (1992, p.93), "estabelecido um jogo constituinte G, o jogo infinitamente repetido pode ser denotado por $G(\infty, \delta)$, onde os jogadores compartilham o mesmo fator de desconto δ. Para cada estágio *t*, o resultado do estágio precedente *t* – 1 é de conhecimento de todos os jogadores antes do início do estágio *t*. O *payoff* de cada jogador em $G(\infty, \delta)$ é o valor presente dos payoffs da seqüência infinita dos estágios do jogo."

No jogo infinitamente repetido, cada subjogo começando no estágio *t* + 1 é idêntico ao jogo original $G(\infty, \delta)$ e no estágio *t* + 1 deste jogo existem tantos subjogos quanto existem histórias possíveis no estágio *t*. Em jogos repetidos também se aplica o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Portanto um equilíbrio de Nash é perfeito em subjogos quando ele é um equilíbrio de Nash em todos os subjogos. Gibbons (1992, p.97) também apresenta o importante teorema de Friedman:

> *Seja G um jogo finito, estático de informação completa. Denote por* $(e_1, \ldots, e_n)$ *os payoffs de um equilíbrio de Nash de G, e denote por* $(x_1, \ldots, x_n)$ *quaisquer outros payoffs possíveis de G. Se* $(x_i > e_i)$ *para todo o jogador i e se* δ *é suficientemente próximo de 1, então existe um*

[22] Neste caso o número de períodos é infinito.

equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do jogo infinitamente repetido $G(\infty, \delta)$ *que resulta no payoff médio* $(x_1, \ldots, x_n)$.

Este 'teorema de todo mundo'[23] aponta para a importância da taxa de desconto, quando ela se aproxima de 1 a "estratégia de gatilho'[24] passa a ser eficiente, evitando desvios de conduta dos jogadores.

C – Jogos Seqüenciais

Assim como os jogos repetidos, os jogos seqüenciais submetem-se a técnica de indução para trás para se obter uma solução para o jogo, podendo haver ou não equilíbrios de Nash em subjogos. Em um jogo seqüencial cada jogador joga em um estágio subseqüente ao estagio jogado pelo seu oponente. Por exemplo, dado a uma ação a_1, que pertence ao espaço das ações A_1, escolhida no primeiro estágio pelo jogador 1, o jogador 2 deverá escolher a ação a_2, que pertence ao espaço das ações A_2, no segundo estágio e resolver o seguinte problema maximização da sua utilidade:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2).$$

Assume-se, por simplificação que o problema tem uma única solução dada por $R_2(a_1)$ que é a curva de reação ou melhor resposta do jogador 2 em virtude da ação escolhida pelo jogador 1. Assim, o jogador 1, sabendo disso, antecipa a reação do jogador 2 e resolve o seguinte problema

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1)).$$

Este jogo pode ser estendido para vários estágios e para n jogadores. O fundamental é que os agentes envolvidos jogam de maneira seqüencial, dado que cada jogador observa a ação do outro jogador antes de tomar a sua decisão.

---

[23] Do inglês *Folk Theorem*.

[24] A "estratégia de gatilho" é a estratégia da qual os agentes participantes podem utilizar como instrumento de punição, caso um ou uns dos agentes com a intenção de obter maiores benefícios tenha uma conduta oposta

Os jogos dinâmicos com informação completa podem envolver informações imperfeitas. Este tipo de jogo dinâmico é caracterizado pelo desconhecimento que ambos os jogadores tem das ações efetuadas pelos seus oponentes em uma dada seqüência do jogo.

Os jogos seqüenciais são apresentados na forma extensiva de jogo. A forma extensiva é apresentada por uma espécie de "arvore" (arvore invertida) onde, cada *nodo* representa a posição e ou estágio em que se encontra o jogo. Os *ramos* da arvore expressam as estratégias de cada jogador e ao final de cada ramo pode-se observar um *nodo* que identifica um agente de decisão (diferente do agente que toma a decisão anterior, ouseja a tomada de decisão é intercalada) ou o *payoff* de cada um dos jogadores, caso o jogo acabe. No jogo seqüencial as ameaças referentes aos jogos repetidos tornam-se não-críveis. Isto se verifica ao se aplicar a técnica de indução para trás. Na tabela 1, pode-se identificar os componentes para se montar um jogo na forma extensiva, a *figura*, o *termo* utilizado e a que se refere:

Tabela 1 – Elementos da Arvore

Figura	*Termo*	*Referência*
●	*nodo*	*Jogador / Agente*
/	*ramo*	*Estratégia / Ação*
( )	*copa*	*Payoff / Ganho*

Observe abaixo, a arvore do jogo extensivo na figura 4. A seqüência do jogo tem a seguinte ordem: agente 1 move primeiro, depois o agente 2 e por fim torna o agente 1 a escolher uma das duas estratégias. As estratégias são de ir para a esquerda, E, ou ir para a direita, D, definida a cada nodo. Existem quatro possíveis pontos finais na extremidade de quatro ramos que indicam, entre parênteses, os *payoffs* de cada jogador, onde o primeiro *payoff* dentro dos parênteses indica o ganho do jogador 1 e o segundo *payoff* indica o ganho do jogador 2. Na arvore abaixo são indicados os subjogos um, dois e três limitados pela extensão do colchete ( ]).

prejudicando seus rivais em determinado período. Esta estratégia potencial provoca um incentivo a condutas cooperativas.

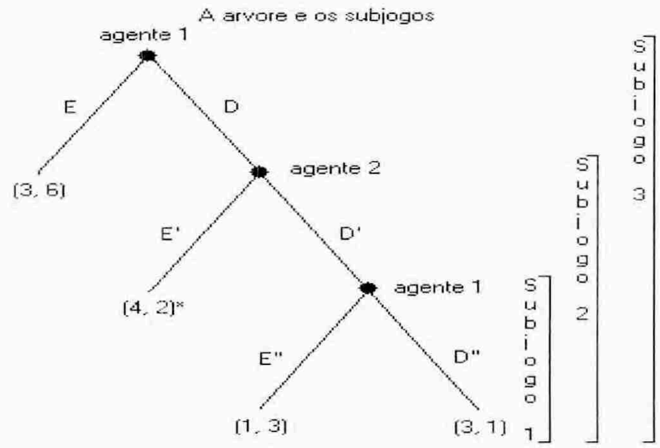

Figura 3 – Arvore e subjogos

Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.322)

Este é um jogo finito descrito na forma extensiva, cujo equilíbrio de Nash perfeito em subjogo corresponde ao agente 1 jogar D e o agente 2 jogar E' obtendo-se um payoff final de (4, 2). Neste caso o jogo pode ser resolvido através da "indução para trás" do termo inglês *backward induction*. No subjogo 1 o agente 1 jogará D" para maximizar o seu *payoff* (3, 1); já no subjogo 2 o agente 2 sabe que se jogar D' ganhará apenas 1, portanto ele acaba jogando E' e tem um ganho de 2. Por fim, no subjogo 3 o agente 1 jogará D, porque ele assume que o jogador 2 jogará E' no próximo nodo, já que o *payoff* de 4 é maior que o *payoff* de 3. Se o jogo fosse expresso por uma forma normal de uma matriz 3 por 2, os equilíbrios de Nash seriam os seguinte (E,D') e (D,E') com *payoffs* de (3, 6) e (4, 2) respectivamente. Portanto o refinamento remove o primeiro equilíbrio de Nash, pois no caso de jogos dinâmicos com informação perfeita e completa as ameaças não são críveis.

Na figura 4 a forma extensiva de um jogo dinâmico com informação imperfeita é apresentado:

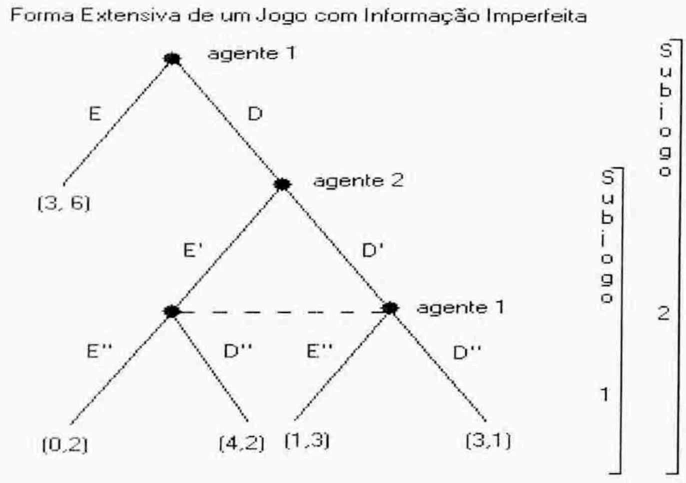

Figura 4 – Forma extensiva de um jogo com informação imperfeita

Neste jogo pode se verificar uma linha tracejada que indica a impossibilidade do agente 1 saber qual movimento que o agente 2 fará ou fez, o inverso também se aplica. Portanto cada subjogo é definido por um conjunto de informação dado por um único nodo.

A resolução do jogo expresso pela figura 5 é relativamente simples. Primeiro, resolvendo por "indução para trás", descobre-se o equilíbrio de Nash para o subjogo 1 e em seguida para o subjogo 2, e ou para o jogo todo. Se o jogador 2 jogar E', o jogador 1 irá jogar D", pois 0 < 4; mas se o jogador 2 jogar D', o jogador 1 também irá jogar D", pois 1 < 3; sabendo disso o jogador 2 jogará E', dado que ele irá obter um payoff de 2, que é maior do que 1. Assim, se obtém o equilíbrio de Nash para o subjogo 1 que é (E', D").

Portanto, o equilíbrio de Nash para o subjogo 2 é dado por (D,E', D"), pois o jogador 1 jogará D sabendo que ganhará um *payoff* de 4 que é maior do que 3. Assim sendo, o equilíbrio de Nash perfeito em subjogo será (D,E', D"). O resultado deste jogo poderia ser alterado ao se alterar os valores de alguns *payoffs* do subjogo 1, podendo provocar uma possibilidade de mais de um equilíbrio de Nash perfeito em subjogo ou um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.[25]

[25] Estas questões podem ser aprofundadas no livro de Gibbons (1992).

A noção de equilíbrio perfeito em subjogo é fundamental para obtenção do resultado final do jogo seqüencial. Esta noção ajuda a montar um conceito mais refinado do equilíbrio de Nash.

Antes da construção do conceito de equilíbrio perfeito em subjogo, é preciso definir alguns conceitos mais simples. Segundo Cornes & Sandler (1996), o subjogo consiste de um jogo que começa em um nodo de uma arvore do jogo extensivo e se estende a todos os nodos subseqüentes, tal que nenhum conjunto de informações de um jogador seja atravessado. Um conjunto de informações consiste de todos os possíveis nodos que um jogador pode estar quando retorna o seu movimento (quando torna a tomar a sua decisão). Esses conjuntos podem incluir mais do que um nodo se um jogador não conseguir observar o movimento prévio do seu oponente. Porém, vêm ao caso, os jogos em que os movimentos são observáveis, ou que um único nodo esteja em cada conjunto de informações.

Uma combinação de estratégias $z^* = [z_1^*, ..., z_n^*]$ em um jogo na forma extensiva com n jogadores é um *equilíbrio de Nash perfeito em subjogo* se este induz a um equilíbrio de Nash em todos os subjogos. (Mas-Colell, Whinston e Green, 1995, p.246)

Portanto, um equilíbrio de Nash perfeito em subjogo consiste de um conjunto de equilíbrios de Nash de cada subjogo componente em que nenhum jogador em um dado subjogo deseja unilateralmente alterar a sua estratégia.

2.4. Algumas Digressões sobre Bens Públicos e Externalidades

Existe uma questão importante sobre os conceitos de externalidade e bens públicos, alguns autores até então assumem que os bens públicos são uma espécie de externalidade positiva, já que as condições de eficiência se assemelham, outros autores separam esses dois conceitos.

Segundo Varian (2000, p. 668) os bens públicos[26] são um exemplo particular de externalidade de consumo em que as pessoas são obrigadas a consumir uma determinada quantidade, que é comum a todas elas, ou seja, as pessoas não podem adquirir os bens públicos de acordo com as suas preferências, consequentemente a provisão de bens públicos gera na maioria das vezes prejuízo para uns em detrimento de outros. Em outras palavras isto ocasiona, tanto externalidades negativas para as pessoas que desejam pagar um valor menor do que o valor per capita do bem público provido[27], quanto externalidades positivas para àquelas que estão dispostas a pagar um valor maior do que o valor per capita do bem público ofertado.

[26] Um exemplo clássico é o defesa nacional.
[27] O mesmo que um imposto ou uma contribuição coercitiva.

3. A INTERAÇÃO ESTRATÉGICA E A PROBLEMÁTICA DAS EXTERNALIDADES E BENS PÚBLICOS

A teoria dos jogos é a matéria que estuda as interações entre as decisões tomadas por uma gama de agentes, neste caso o que importa são os agentes econômicos.[28] Segundo Cornes & Sandler (1996) os casos de externalidades e bens públicos envolve a interdependência entre indivíduos, firmas e autoridades fiscais. Por exemplo, está claro que autoridades fiscais e firmas interagem entre si. Mas poderia ser feita uma analogia a todos utilizando o termo *agente*.

Cornes & Sandler (1996) afirmam que o benefício líquido de um indivíduo depende de suas ações e das decisões de escolha de consumo, produção e subscrição de outros indivíduos[29]. Portanto, para o problema padrão de bens públicos e externalidades as escolhas entre os indivíduos envolvem interdependências entre as estratégias e *payoffs*. Em outras palavras, a melhor estratégia de uma pessoa pode depender das estratégias de outros.

Existem duas categorias de jogos: cooperativos e não-cooperativos. A primeira categoria, jogos cooperativos, se caracteriza pela realização de acordos entre os agentes, em que os acordos regulam os seus atos. Os jogos cooperativos se focalizam na formação e na estabilidade das coalizões, já os jogos não-cooperativos baseiam-se nas escolhas individuais dos agentes. Tais acordos não são permitidos em jogos não-cooperativos. Nesta segunda categoria os agentes formulam expectativas sobre seus ambientes econômicos que

---

[28] Para um estudo mais geral da teoria dos jogos aconselha-se a estudar Gibbons (1992), Varian (1992, p.259-284) e Rasmusen (1994) e Amarante (2002).

[29] O termo indivíduos utilizado por Cornes & Sandler (1996) tem um sentido mais geral e envolve pessoa física e pessoa jurídica.

são determinados pelas possíveis estratégias dos outros agentes frente as suas possibilidades de escolha sobre uma variável que é de seu controle.

Uma estrutura teórica dos jogos cooperativos – neste caso os jogadores podem, por um baixo custo, formar grupos ou coalizões, dentro das quais podem coordenar suas ações e negociar suas parcelas de benefícios que recebem. Cada indivíduo de uma coalizão pode se considerar melhor se estiver junto a outra coalizão. Isto é uma hipótese de *racionalidade individual* que é imposta por meio de que o indivíduo deve ser melhor na coalizão do que fora dela, dado que ela permaneça. A racionalidade individual é equivalente à *restrição de participação*, usada na literatura do incentivo. Esta categoria de jogo sugere um conceito natural de equilíbrio, o *core* ou núcleo, que consiste do conjunto de alocações tal que nenhum indivíduo ou grupo de indivíduos pode melhorar suas posições formando uma coalizão alternativa. Isto é, o *core* ou o núcleo existe quando não há coalizões que bloqueiam, por meio de um grupo de agentes que pode ser melhor, entre o conjunto de todas as possibilidades de coalizões. O conjunto de alocações do núcleo ou *core*, deverá encolher quando o número de indivíduos for aumentado e no limite irá convergir ao conjunto do equilíbrio competitivo. A definição usual de *core* é problemática na presença de bens públicos.

Porem, o foco deste estudo este baseado nos jogos não-cooperativos, dado à natureza do tema, no qual envolve, a princípio uma rivalidade entre agentes – indivíduos, firmas e governo. Gibbons (1992) relaciona quatro tipos de jogos não cooperativos: (i) jogos estáticos com informação completa, (ii) jogos dinâmicos com informação completa, (iii) jogos estáticos com informação incompleta e (iv) jogos dinâmicos com informação incompleta. Esta ordem tipológica estabelecida pelo autor reflete o aumento do grau de refinamento do conceito de *Equilíbrio de Nash*. Cabe aqui apresentar alguns exemplos de aplicações de jogos não-cooperativos quando existe a ocorrência de bens públicos e externalidades.

Neste capítulo pretende-se apresentar alguns dos modelos de jogos que são aplicados à teoria das externalidades e bens públicos. De forma geral, os exemplos teóricos apresentados tem um nível de complexidade intermediária, sugerindo um estudo prévio de otimização condicionada[30]. Na primeira seção apresenta-se dois jogos estáticos com escolhas binárias e dois jogadores e na seção 3.2 estende-se à análise para *n* jogadores. Na seção 3.3 é apresentado um jogo repetido com quatro estratégias na análise da provisão do bem público. Na seção seguinte apresenta-se um jogo estático com conjunto contínuo de estratégias representadas por funções de reação para abordar o problema da ineficiência na provisão do bem público quando há interação estratégica. Por fim, apresenta-se um jogo seqüencial envolvendo externalidades.

3.1. Jogos Estáticos com Escolhas Binárias e Dois Jogadores

As discussões tradicionais sobre bens públicos e ações coletivas quase sempre envolvem jogos estáticos não cooperativos com escolhas binárias. Os exemplos desenvolvidos são estruturados com dois jogadores que escolhem entre um par de estratégias. A combinação das estratégias resulta nos *payoffs* de cada jogador, ou seja, o payoff depende da escolha de ambos os jogadores. Segundo Cornes & Sandler nos anos recentes modelos de dois jogadores e escolhas binárias tem sido extensivamente utilizado pela economia em assuntos como externalidade, bens públicos, decisões de entrada e saída da firma, decisões de greve de trabalhadores, corrida armamentista e outros fenômenos.

Segundo Gibbons (1992) na forma normal de representação de jogos, cada jogador escolhe simultaneamente uma estratégia, e a combinação de estratégias escolhidas pelos jogadores determina um payoff (ganho) para cada jogador. Um exemplo tradicional de um jogo é o *dilema dos prisioneiros*. Pode-se representar o problema da provisão dos bens públicos através do seguinte exemplo. Um jogo com dois agentes e duas estratégias é apresentado na matriz 1 e descrito graficamente pela figura 5.a, típico *dilema dos prisioneiros*. A ação de contribuir refere-se a colaboração de uma unidade do bem público por parte de um dos agentes, na figura 5a fica claro que o ato de contribuir do agente A equivale a $qA = 1$ no eixo horizontal, esta mesma ação para o agente B equivale a $qB = 1$ no

[30] Uma leitura do apêndice matemático de Varian (2000) e do capítulo 12 de Chiang (1982) são suficientes para a compreensão dos modelos.

eixo vertical, e o ato de não contribuir para ambos os agentes é o mesmo que qA = qB = 0. A ilustração gráfica do Dilema dos Prisioneiros e do *Chicken Game*[31] descreve as utilidades ordinais do agente A. Porém, toma-se a matriz 1 para analisar o primeiro caso. Assumi-se que os dois jogadores são racionais e tem conhecimento pleno da seguinte matriz binária:

		Contribuinte B	
		Não contribuir	Contribuir
Contribuinte A	Não contribuir	2 , 2	4 , 1
	Contribuir	1 , 4	3 , 3

MATRIZ 1 – *O Dilema dos Prisioneiros*
Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.306)

Uma característica do jogo não-cooperativo é a impossibilidade de comunicação entre os agentes. Portanto, são quatro as consequências das ações que os jogadores podem tomar. Se um deles contribuir e o outro não contribuir, então aquele que contribuiu receberá o nível de utilidade equivalente a 1, e aquele que não contribuiu receberá o equivalente a 4.

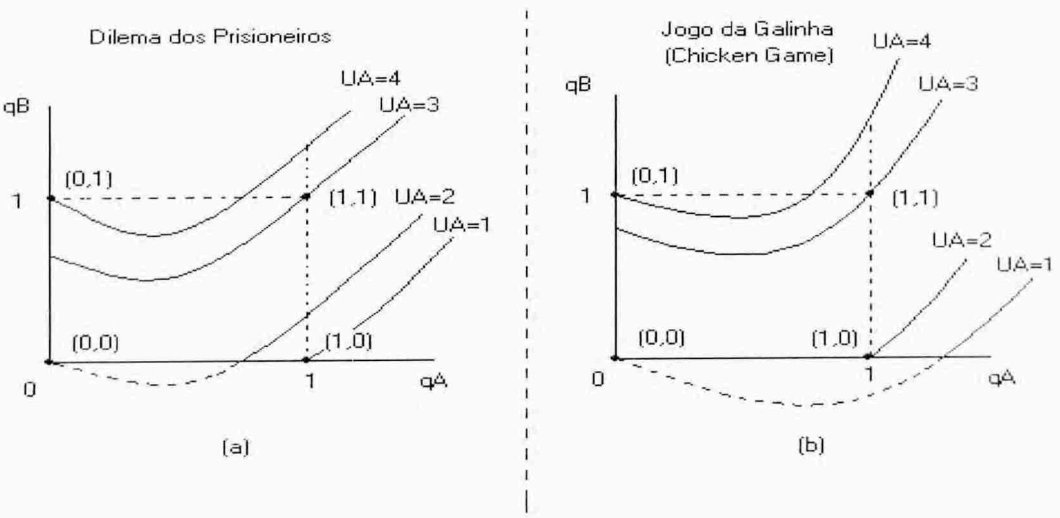

Figura 5 – Utilidade, dilema dos prisioneiros e jogo da galinha

Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.307 e 309)

[31] Estes dois tipos de jogos apresentados neste trabalho são retirados de Cornes & Sandler (1996).

Graficamente se $qA = 1$ e $qB = 0$, tem-se que A estará no nível de utilidade igual a 1 e portanto B utilizará o bem público sem contribuir recebendo um benefício de 4, B neste caso será um *free rider*. No caso de nenhum dos dois contribuir, $qA = qB = 0$, ambos receberão um *payoff* de 2 cada e o bem público não será provido. Na figura 5.a, A receberá uma utilidade igual a 2, pois o ponto (0, 0) toca o nível de utilidade ordinal equivalente a 2. Finalmente, se ambos contribuírem, $qA = qB = 1$, num ato de cooperação, então ambos receberiam um *payoff* equivalente a 3 cada um. Na descrição gráfica da figura 5.a, o nível de utilidade de A é igual a 3 quando a curva de utilidade passa pelo ponto (1, 1), onde os dois agentes estão dispostos a colaborar com uma unidade do bem público cada. Já que o jogo é não-cooperativo do tipo *dilema dos prisioneiros* em que existe apenas uma estratégia dominante – não contribuir, $qA = qB = 0$ – o resultado será o equilíbrio de Nash que é caracterizado por uma situação sub-ótima. O par de estratégias não contribuir (N, N) é o equilíbrio de Nash já que nenhum dos dois jogadores deseja mudar de posição. Se B escolhe não contribuir, A fica melhor se não contribuir, pois 2 > 1. Mas, se B decide contribuir, A ficará melhor se continuar não contribuindo, pois 4 > 3. O contribuinte B tem um pensamento similar ao contribuinte A e escolherá não contribuir. Esta é a lógica do equilíbrio de Nash na matriz 1.

Cabe aqui fazer uma observação sobre o formato das curvas de indiferença do contribuinte A. Primeiramente deve-se assumir contribuições contínuas do bem público. Esta curva em formato de U mostra que o contribuinte A, inicialmente está disposto a contribuir pequenas quantidades para desfrutar do benefício gerado pelo bem dado que o contribuinte B decresce a sua contribuição. A partir do ponto de mínimo da curva, o contribuinte A só passará a contribuir, se houver uma contrapartida de B, sob pena de perder bem-estar.

		Contribuinte B	
		Não contribuir	Contribuir
Contribuinte A	Não contribuir	1 , 1	4 , 2
	Contribuir	2 , 4	3 , 3

MATRIZ 2 – *Chicken Game*
Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.308)

Existem outras situações em que não existe uma estratégia dominantecomo é o caso do *chicken game* (jogo da galinha) descrito graficamente pela figura 5.b e apresentado pela forma normal na matriz 2 acima. Pode-se observar que, se A espera que B contribua, A irá preferir não contribuir e tornar-se um *free rider*. Mas se A espera que B não irá contribuir então, A desejará contribuir com a provisão de uma unidade do bem público. Portanto, neste caso, tem-se dois equilíbrios de Nash, A contribui e B não contribui, (C, N), e A não contribui e B contribui, (N, C). Graficamente na figura 5.b identifica-se os equlíbrios de Nash nos pontos (1, 0) e (0, 1), respectivamente como acima. Os pontos (1, 1) e (0, 0), ou no caso da matriz 2, as estratégias (C, C) e (N, N), não são equilíbrios de Nash porque nestas situações ambos os jogadores têm incentivo a mudar de situação escolhendo uma estratégia oposta a do outro jogador. A conduta de um jogador deve ser *maximin* e a do outro de ser *maximax* para se obter um dos equilíbrios de Nash. A conduta *maximin* é aquela em que o jogador se apóia na estratégia que maximiza o seu *payoff* dentre o conjunto dos menores *payoffs* possíveis, {1 e 2}, neste caso a estratégia é contribuir e o *payoff* que pretende-se obter é ao menos 2. Enquanto a conduta de *maximax* é a qual o jogador busca o maior *payoff*, 4, dentre o conjunto dos maiores *payoffs* possíveis, {3 e 4}, então a estratégia será não contribuir. Se a conduta de ambos os jogadores é igual, ambos não são levados a uma situação de equilíbrio de Nash, já que está simetria de comportamento é derrubada tendo em vista que os agentes racionais maximização o ganho particular.[32]

[32] Outros tipos de jogos estáticos que não são apresentados aqui podem ser vistos em Cornes & Sandler (1996, p. 310 e311). O resultado de Cournot-Nash descrito na seção 3.4 é um equilíbrio de um jogo não-cooperativo da provisão de bens públicos, onde Mueller (1989) compara o equilíbrio ótimo de Pareto com o equilíbrio Cournot-Nash.

3.2. Jogos Estáticos com Escolhas Binárias e *n*-Jogadores

O jogo 2-por-2 pode ser estendido para *n* jogadores mantendo a hipótese de escolha binária. Um jogo simétrico com *n* jogadores é sumarizado pela tabela 1[33]. Nesta tabela o topo das colunas (0, 1, ..., *j*-1, *j*, *j*+1, ..., *n*) referem-se aos *j* contribuintes que tomam a decisão de contribuir com uma unidade do bem público, ao passo que as linhas indicam as estratégias de contribuir e não contribuir e os respectivos *payoffs* do *iésimo* contribuinte. A cada *j* indivíduo que contribui, o indivíduo *i* receberá um benefício de 6 como uma utilidade cardinal. Ao passo que, se o indivíduo *i* contribuir recairá sobre ele um custo de 8 pela sua contribuição de prover a unidade do bem público, logo receberá (6 – 8) = –2. Do contrário, se ele não contribuir receberá um benefício líquido de 6, a cada *j* indivíduo que contribuir, assim o contribuinte *i* fica estimulado a agir como um *free rider* (carona). Porém, já que os *j* contribuintes sabem disso, fica demonstrado que para todos os participantes do jogo a estratégia dominante é não contribuir, é o que estabelece o equilíbrio de Nash.[34]

[33] Este jogo e o jogo repetido é uma extensão do jogo estático com dois jogadores e escolhas binárias de Cornes e Sandler (1996, p. 311). Veja a matriz de *payoffs* tipo dilema dos prisioneiros que é estendida nos dois jogos descritos nesta seção:

		Jogador B	
		Não contribuir	*Contribuir*
Jogador A	*Não contribuir*	* 0, 0	6, –2
	Contribuir	–2, 6	4, 4

As estratégias de contribuir e não contribuir podem ser respectivamente cooperar e não cooperar (trair).

[34] Pode ser feito na tabela 1, uma analogia para os *n* contribuintes de cada vez e provar que a estratégia dominante para ambos é não contribuir. Ver outro exemplo em Cornes & Sandler (1996, p. 313 e 314)

Tabela 2 - Dilema dos Prisioneiros para provisão de bens públicos com n participantes.

Número de contribuintes fora do conjunto de i

Estratégias do indivíduo i	0	1	...	$j-1$	j	$j+1$	...	$n-1$
Não contribui	*0	6		$6(j-1)$	$6j$	$6(j+1)$		$6(n-1)$
Contribui	-2	4		$6j-8$	$6(j+1)-8$	$6(j+2)-8$		$6n-8$

Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.313)

Portanto, o equilíbrio de Nash é sub-ótimo em relação a uma conduta de cooperação plena. Bastaria que pelo menos dois indivíduos colaborassem para que todos fiquem melhor, ou seja, para $n \geq 2$, $6n-8>0$; isto ilustra que uma conduta não cooperativa leva a uma sub-provisão do bem público. Além disso, torna-se um forte argumento para o aparecimento de um mecanismo de punição.

3.3. Jogos Repetidos e a Provisão de Bens Públicos

No mundo real os agentes interagem repetidamente, com isso o conjunto de equilíbrios de Nash podem aumentar e permitir resultados próximos aos cooperativos. Os indivíduos tomam suas decisões baseadas nos *payoffs* atual e futuro. Para atualizar o valor futuro dos *payoffs* a cada período[35] utiliza-se uma taxa de desconto de r por período. Assim, fica estabelecido que para um número infinito de períodos e a uma taxa de juros composta, i, todos os *payoffs*[36] de cada período serão atualizados pela seguinte regra

$$M_{\pi} = \pi(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots), \tag{1}$$

[35] Neste caso o número de períodos é infinito.

[36] Os *payoffs* de cada período devem ser idênticos.

onde M_π é o montante de *payoffs* atualizados e π é o *payoff* que será recebido a cada período. Já que, $r = (1 + i)^{-1}$ e $(1 - r)^{-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$, onde o valor dos expoentes de r indicam a taxa de desconto do período a ser atualizado, substituindo estas expressões em 1 tem-se

$$M_\pi = \pi(1 - r)^{-1} \qquad (2)$$

Considere um problema de provisão do bem público com dois indivíduos e *payoffs* correspondendo ao dilema dos prisioneiros expresso por Cornes & Sandler (1996) que a seguinte matriz 3 descreve. A representação normal do jogo tipo dilema dos prisioneiros é estendida para um jogo repetido infinitamente com quatro padrões de estratégia: *Grim*, *tit-for-tat*, cooperar e trair.[37] A estratégia tipo *grim* é aquela em que o jogador coopera no primeiro período, e trai perpetuamente nos períodos subseqüentes caso o outro jogador venha a trair. A *tit-for-tat* é a estratégia em que o jogador coopera no primeiro período, e então, caso seu rival jogue outra estratégia, ele escolherá no próximo período a estratégia do seu oponente jogada em no período anterior. Cooperar é a estratégia, para o caso da provisão do bem público, de contribuir perpetuamente. Por fim, trair, é não cooperar para sempre. Cabe ressaltar que as estratégias do jogo abaixo são um padrão de movimentos de cooperar e não cooperar (trair) como foi descrito acima.

MATRIZ 3

		Estratégias de B			
		Grim (G)	*Tit-for-tat (T)*	*Cooperar (C)*	*Trair (N)*
Estratégias de A	*Grim (G)*	$* \frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$* \frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$\frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$-2, 6$
	Tit-for-tat (T)	$* \frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$* \frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$\frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$-2, 6$
	Cooperar (C)	$\frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$\frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$\frac{4}{1-r}, \frac{4}{1-r}$	$\frac{-2}{1-r}, \frac{6}{1-r}$
	Trair (N)	$6, -2$	$6, -2$	$\frac{6}{1-r}, \frac{-2}{1-r}$	$* 0, 0$

Jogo do dilema dos prisioneiros repetido.

Fonte: Cornes & Sandler (1996, p.317)

Neste jogo os equilíbrios de Nash estão em asterisco. As combinações de estratégias do equilíbrio de Nash são: (G, G), (G, T), (T, G), (T, T) e (N, N). Na matriz acima o autor sugere que os benefícios futuros não são descontados tão pesadamente (isto é os juros, i, não são tão grandes e o fator de desconto, $(1 + i)^{-1}$, não é tão pequeno). A taxa de juros tem que ser aproximadamente menor do que 200% (duzentos por cento), que é uma taxa extremamente exagerada. Então, identifica-se os equilíbrios de Nash pela seguinte regra de desigualdade $-2 < 0 < 6 < 4(1 - r)^{-1} < 6(1 - r)^{-1}$. Para conferir o equilíbrio de Nash (EN), tome a célula correspondente e verifique se o jogador está motivado ou não a se mover para outra estratégia. Por exemplo, a combinação (G, C) não é um EN, pois o jogador o jogador A esta motivado a mover-se para estratégia trair, que melhora o seu *payoff* de $4(1 - r)^{-1}$ para $6(1 - r)^{-1}$. Já nas combinações de estratégias de EN ambos os jogadores não ficarão melhores do que estão, pois seus *payoffs*[38] no caso de uma mudança estratégica individual[39] ou ficarão como estão ou irão piorar.

[37] A tradução de *grim* é de austero ou inflexível e *tit-for-tat* é uma expressão tipo "bateu levou".

[38] Verifique a regra da desigualdade dos *payoffs* para o referente jogo.

[39] Não há a possibilidade de mudança conjunta já que é um jogo não cooperativo, e por isso os jogadores agem individualmente de forma racional pensando em maximizar o seu ganho.

Os Jogos do tipo repetido infinitamente podem desencorajar a conduta de *free rider* no contexto dos jogos não-cooperativos, assim mitigando a tendência de levar o resultado a equilíbrio(s) subótimo(s).

3.4 Jogo estático com conjunto contínuo de estratégias

O problema da provisão voluntária – provisão privada[40] – de bens públicos é apresentada nesta seção na forma de funções contínuas, apresentando duas soluções possíveis: o equilíbrio Pareto eficiente e o equilíbrio do tipo Cournot-Nash. A comparação destes dois equilíbrios é melhor visualizada por intermédio de um exemplo de função utilidade do tipo Coob-Douglas.

Mueller (1989) propõe o exemplo da construção de uma represa com sacos de areia que são doados pelos membros da comunidade. Quanto mais sacos de areia são doados, mais alta e forte será a represa, melhorando cada vez mais o bem-estar de todos os membros da comunidade.

Tome G_i como a contribuição do indivíduo i para o bem público, assim a quantidade total ofertada do bem público é dada por

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_i + \cdots + G_n \qquad (1)$$

A função de utilidade de cada indivíduo é dada por $U_i(X_i, G)$, onde X_i é a quantidade de bem privado consumida por i. A questão é o quanto i vai ofertar do bem público e qual é o G_i ótimo, dado a sua restrição orçamentária, $Y_i = P_x X_i + P_g G_i$, onde Y_i é a sua renda e P_x e P_g são respectivamente, os preços do bem privado e o preço do bem público. Na ausência de instituições que coordenem as contribuições, cada indivíduo deve decidir, independentemente dos outros, o quanto ofertar do bem público. Ao tomar a decisão é razoável assumir que o indivíduo tome como fixa a oferta do bem público do resto da

[40] Segundo Varian (1992, p. 420-423).

comunidade e escolha o nível de G_i que maximize a sua utilidade, dado os valores de G_j escolhido por todos os outros indivíduos j na comunidade. O seu problema de maximização da utilidade é

$$\max_{X_i, G_i} U_i(X_i, G)$$

$$sujeito\ a\ Y_i = P_x X_i + P_g G_i,$$

$$Lagrangiano: \quad \mathcal{L} = U_i(X_i, G) - \lambda(P_x X_i + P_g G_i - Y_i). \qquad (2)$$

O resultado da derivada de (2) com respeito a G e X_i é dada respectivamente por:

$$\frac{\partial U_i}{\partial G} = \lambda P_g \qquad (3)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \lambda P_x \qquad (4)$$

Dividindo (3) por (4) obtem-se:

$$\frac{\partial U_i / \partial G}{\partial U_i / \partial X_i} = \frac{P_g}{Px} \qquad (5)$$

como condição de maximização da utilidade.

Agora, para se obter um ótimo de Pareto para a comunidade como um todo, monta-se a seguinte função de bem-estar com utilidades individuais ponderadas:

$$W = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \cdots + \alpha_i U_i + \cdots + \alpha_n U_n, \qquad (6)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n > 0$. Maximizando (6) sujeito a seguinte restrição orçamentária agregada

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = P_x \sum_{i=1}^{n} X_i + P_g G. \tag{7}$$

Processo de maximização do bem-estar é semelhante ao desenvolvido em Varian (2000, p.691 e 692), salvo as ponderações na função de utilidade que são eliminadas no processo e a função de restrição que impõe um preço para o consumo do bem privado. Portanto, será interessante que seja expresso de forma direta a condição de Pareto ótimo na presença de bens públicos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i / \partial G}{\partial U_i / \partial X_i} = \frac{P_g}{P_X} \tag{8}$$

esta condição, já mencionada na seção sobre bens públicos é semelhante a apresentada por Samuelson (1954). A quantidade de bem público provida no equilíbrio tipo Cournot-Nash é provavelmente menor do que a quantidade ótima de Pareto que atende a condição (8). O equilíbrio tipo Cournot-Nash reflete uma interação estratégica onde, a decisão de contribuir do indivíduo *i* dependerá da decisão de contribuição do resto da comunidade, e dado que todos pensam da mesma forma a provisão do bem será subótima. Ao reescrever (8) na forma de curva de reação, tem-se:

$$\frac{\partial U_i / \partial G}{\partial U_i / \partial X_i} = \frac{P_g}{P_X} - \sum_{j \neq i} \frac{\partial U_j / \partial G}{\partial U_j / \partial X_j}. \tag{9}$$

Se G e X são bens normais em cada função utilidade individual, então

$$\sum_{j \neq i} \frac{\partial U_j / \partial G}{\partial U_j / \partial X_j} > 0,$$

logo, a taxa marginal de substituição do bem público pelo bem privado para o indivíduo i definida por (9) será menor do que a TMS definida por (5).

Para identificar a diferença na quantidade da oferta de bem público entre os equilíbrios de Cournot-Nash e de Pareto ótimo, Mueller (1989, p.19-21) sugere um exemplo com uma função de utilidade do tipo Cobb-Douglas, $U_i = X_i^{\alpha} G^{\beta}$, onde $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$. A condição (5) torna-se

$$\frac{\beta X_i^{\alpha} G^{\beta-1}}{\alpha X_i^{\alpha-1} G^{\beta}} = \frac{P_g}{P_x}, \tag{10}$$

disto segue que

$$G = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_g} X_i, \tag{11}$$

Substituindo (1) e a restrição orçamentária do indivíduo i em (11) tem-se

$$\sum_i G_i = \frac{\beta}{\alpha}\frac{P_x}{P_g}\left(\frac{Y_i}{P_x} - \frac{P_g}{P_x} G_i\right), \tag{12}$$

manipulando (12) obtêm-se

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) G_i = -\sum_{j \neq i} G_j + \frac{\beta}{\alpha}\frac{Y_i}{P_g} \tag{13}$$

ou

$$G_i = -\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\sum_{j \neq i} G_j + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\frac{Y_i}{P_g} \tag{14}$$

A equação (14) implica que o indivíduo i escolhe voluntariamente ofertar um montante menor de bem público, já que ele acredita ser o montante de bem público provido pelos outros cidadãos. Numa comunidade com dois indivíduos a equação (14) define a familiar curva de reação da teoria do duopólio. Neste caso uma linha reta de inclinação negativa.

Se todos os membros da comunidade têm rendas idênticas, Y, então todos escolherão os mesmos níveis de G_i, e (14) pode ser usada para encontrar a contribuição de equilíbrio de um único indivíduo:

$$G_i = -\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)(n-1)G_i + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{Y}{P_g}, \tag{15}$$

disto obtêm-se

$$G_i = \left(\frac{\beta}{n\alpha+\beta}\right)\frac{Y}{P_g}. \tag{16}$$

O montante do bem público provido pela comunidade por meio de contribuições independentes torna-se então

$$G = nG_i = \left(\frac{n\beta}{n\alpha+\beta}\right)\frac{Y}{P_g}. \tag{17}$$

Estas quantidades podem ser comparadas as quantidades ótimas de Pareto. Dado que as rendas individuais, Y_i, as contribuições, G_i, e o consumo de bens privados, X_i, são idênticos para todos os indivíduos da comunidade, então aplicando a condição (8) ao caso, logo tem-se

$$n\frac{\beta X_i^{\alpha} G^{\beta-1}}{\alpha X_i^{\alpha-1} G^{\beta}} = \frac{P_g}{P_X} \tag{18}$$

Usando a restrição orçamentária para eliminar X_i e fazendo algumas manipulações algébricas obtêm-se a contribuição ótima de Pareto de um único indivíduo

$$G_i = \left(\frac{n\beta}{\alpha + n\beta} \right) \frac{Y}{P_g}, \tag{19}$$

que multiplicada por n indivíduos, tem-se

$$G = nG_i = \left(\frac{n^2\beta}{\alpha + n\beta} \right) \frac{Y}{P_g}. \tag{20}$$

Assume-se agora que G_{PO} é a quantidade ótima de Pareto na provisão do bem público, definida pela equação (20), e G_{CN} é a quantidade de equilíbrio Cournot-Nash, definida pela equação (17). A razão entre elas é dada por

$$\frac{G_{CN}}{G_{PO}} = \frac{\left(\frac{n\beta}{n\alpha + \beta} \right) \frac{Y}{P_g}}{\left(\frac{n^2\beta}{\alpha + n\beta} \right) \frac{Y}{P_g}} = \frac{\alpha + n\beta}{n^2\alpha + n\beta} < 1. \tag{21}$$

dado que $n > 0, \forall\, n \in IN^+$, esta razão tenderá a zero quando n torna-se incrivelmente grande. Assim, em comunidades maiores do que as de um indivíduo[41], a oferta do bem público é levada á níveis menores do a quantidade de Pareto ótimo e o *gap*, $G_{PO} - G_{CN}$, entre estes dois tipos de quantidade aumenta quando o tamanho da comunidade aumenta. Varian (1992) também sugere que no caso de contribuições privadas (voluntárias) os indivíduos tenderão a fazer colaborações menores que as quantidades paretianas. Assim, se mostra necessário que algumas instituições coordenem as contribuições de cada indivíduo.

[41] Exemplos teóricos como a economia do tipo Robinson Crusoé é um caso hipotético que não faz frente as relações existentes em um ambiente econômico moderno como o atual.

3.5 Externalidade e o jogo seqüencial com informação imperfeita

Varian (1992, p. 436-438) apresenta um mecanismo de compensação para o caso de externalidades. Esse sistema tenta resolver o problema de informação na cobrança do imposto pigouviano. Ele afirma que os impostos pigouvianos não são adequados, em geral, para resolver as externalidades devido ao problema de informação. Em geral, as autoridades desconhecem os custos submetidos pelas externalidades. Dito isto, existe um mecanismo relativamente fácil para internalizar as externalidades.

O processo envolve um ambiente de mercado para externalidade, mas faz com que as firmas revelem corretamente os custos que elas impõe sobre os outros. O método funciona da seguinte forma:

1. *Estágio do Anúncio*: A firma i , tal que $i \in \{1,2\}$, declara um imposto pigouviano t_i que pode ou não ser o nível eficiente de tal imposto.
2. *Estágio da escolha*: Se a firma 1 produz x unidades de produto, então ela tem que pagar uma taxa t_2x, e a firma 2 recebe a compensação no montante de t_1x. No mais cada firma paga uma penalidade (multa) dependendo da diferença entre seus dois anúncios de alíquotas do imposto.

Neste problema a multa tem a forma quadrática $(t_1 - t_2)^2$ para a firma 1 e $(t_2 - t_1)^2$ para a 2, mas o importante é que se $t_1 = t_2$ a multa é zero e para $t_1 \neq t_2$ ela é positiva. Assim os *payoffs* finais para a firma 1 e para a firma 2 são dados por:

$$\pi_1 = px - c(x) - t_2x - (t_1 - t_2)^2 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 = t_1x - e(x) - (t_2 - t_1)^2$$

É possível verificar que o resultado de equilíbrio para este jogo envolve um nível eficiente de produção de externalidade. Para isto uma razoável noção de equilíbrio para este jogo de dois estágios é a do equilíbrio perfeito em subjogo, no qual cada firma leva em conta a repercussão da sua escolha no primeiro estágio sobre o resultado no segundo estágio. (o conceito de equilíbrio perfeito em subjogo não é somente um equilíbrio no jogo inteiro mas também um equilíbrio para cada subjogo, sugerindo assim a técnica da indução para trás – *backwards induction*)

Como é usual resolve-se este jogo olhando primeiro para o segundo estágio, ou melhor, resolve-se primeiro o segundo estágio do jogo. Considere o produto escolhido no segundo estágio do jogo. A firma 1 escolherá x para satisfazer a seguinte condição de maximização

$$\max_{x} \; px - c(x) - t_2 x - (t_1 - t_2)^2,$$

resultando na seguinte condição

$$p = c'(x) + t_2 \qquad (1)$$

Portanto, para cada escolha de t_2, existirá alguma escolha ótima de $x(t_2)$. Se $c''(x) > 0$, então $x'(t_2) < 0$.

No primeiro estágio cada firma, escolherá as alíquotas de imposto que maximizam seus lucros. Para a firma 1 a escolha é simples: se a firma 2 escolhe t_2, então a firma 1 também deseja escolher $t_1 = t_2$. Veja a demonstração:

$$\max_{t_1} px - c(x) - t_2 x - (t_1 - t_2)^2,$$

que resulta em

$$-2(t_1 - t_2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad t_1 = t_2 \qquad (2)$$

A situação da firma 2 exige um pouco de artimanha, já que ela tem que reconhecer que a sua escolha de t_2 afeta o resultado da firma 1 por meio da função $x(t_2)$. Assim diferenciando a função lucro da firma 2 com respeito a t_2, tem-se

$$\pi_2'(t_2) = t_1 x'(t_2) - e'(x)x'(t_2) - 2(t_2 - t_1) = 0$$

ou

$$[t_1 - e'(x)]x'(t_2) - 2(t_2 - t_1) = 0 \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3), encontra-se

$$[t_2 - e'(x)]x'(t_2) - 2(t_2 - t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = e'(x),$$

e por fim, substituindo $e'(x)$ por t_2 na equação (1) tem-se $p = c'(x) + e'(x)$ que é a condição de eficiência.

Este método trabalha com incentivos contrários (tipo punição) para os dois agentes. Fica claro que na equação (2) o agente 1 sempre tem um incentivo a igualar a alíquota anunciada por 2. Se o agente 2 pensa que o agente 1 irá propor uma taxa de compensação elevada t_1 para ele, então ele deseja que o agente 1seja taxado o menos possível– então o agente 1 irá produzir o máximo possível. Por outro lado se o agente 2 pensa que o agente 1 irá propor uma pequena alíquota de compensação para ele, então o agente 2 quer que o agente 1 seja taxado o mais alto possível. O único ponto em que o agente 2 é indiferente sobre o nível de produção do agente 1 é onde o agente 2 é exatamente compensado, na margem, do custo da externalidade.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria dos jogos serve como um forte instrumental para explicar as interações entre os agentes econômicos. Neste trabalho procurou-se mesclar alguns aspectos conceituais da teoria dos jogos aplicados a teoria dos bens públicos e das externalidades.

Na teoria moderna do setor público é freqüente a utilização da ferramenta de jogos, já que as condutas dos governos, firmas e indivíduos estão interligadas. Cabendo ressaltar, por exemplo, que os gastos com bens públicos são financiados pelo resultado da arrecadação de impostos, sugerindo a interferência do governo. Como foi relatado, o interesse de um agente interfere nos interesses de outros agentes, podendo-se obter resultados nada convencionais, como equilíbrios ineficientes ou a possibilidade de vários equilíbrios.

Uma das conclusões alcançadas neste estudo é que a teoria das externalidades pode ser abordada de forma mais adequada por meio de jogos dinâmicos do tipo seqüencial. A externalidade é gerada por uma conduta de agente econômico num primeiro instante, mas os efeitos da externalidade sobre o bem-estar de outro agente, só serão sentidos em um segundo instante e é neste instante que pode ocorrer uma reação deste. Existe uma dificuldade de se modelar um jogo estático que envolve externalidade, pois, na realidade, o agente receptor não reagirá antes de sentir os seus efeitos.

Quando se analisa o problema da provisão dos bens públicos, a forma mais adequada de abordagem é por intermédio dos jogos estáticos e dos dinâmicos do tipo repetido. A aplicabilidade de um jogo do tipo seqüencial na análise da provisão do bem público não está clara. As decisões padrão de contribuir e de não contribuir de um jogo de provisão de bens públicos do tipo dilema dos prisioneiros, por exemplo, mostram que a análise por intermédio de um jogo seqüencial torna o segundo jogador inerte, pois, o ato de contribuir ou não contribuir do primeiro jogador, não afetará em um segundo instante a decisão do segundo jogador.

No entanto, tais problemas podem ser abordados via jogos bayesianos, respeitando o que foi dito anteriormente, pois ambos envolvem assimetria de informação e ou incertezas. A análise da teoria das externalidades envolve assimetria de informações, pois o agente gerador da externalidade não tem como mensurar o prejuízo ou benefício sofrido por outros agentes. A modelagem de jogos bayesianos envolvendo externalidade e bens públicos pode ser objeto de análise de outros trabalhos, já que neste trabalho limitou-se a nálise para jogos com informação completa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARANTE, Adriano de. *Resenha da literatura da competição fiscal: com vistas na guerra fiscal no brasil e uma proposta de análise por intermédio da teoria dos jogos*. 2002, 125 f.. Dissertação (Mestrado em Economia) – Programa de Pós-graduação em Economia, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis :

BÊRNI, Duilio de Avila et al. *Técnica de Pesquisa em Economia: Transformando curiosidade em conhecimento*. Florianópolis : Ganges, 1998.

CHIANG, Alpha C.. *Matemática para Economistas. Trad.* Roberto Camps Moraes. São Paulo : McGraw-Hill do Brasil & Ed. Da Universidade de São Paulo, 1982.

COASE, Ronald. The problem of social costs. *The Journal of Law and Economics*. 3, October, 1960.

CORNES, Richard & SANDLER, Todd. *The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods*. 2 ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996.

GIBBONS, Robert. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton : Princeton University Press, 1992.

MAS-COLELL, Andreu, WHINSTON, Michael D. & Jerry R.GREEN. Microeconomic Theory. New York : Oxford University Press, 1995.

MUELLER, Dennis C.. *Public Choice II*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989.

MUSGRAVE, Richard A. & MUSGRAVE, Peggy B.. *Finanças Públicas, teoria e prática. Trad. de* Carlos Alberto Primo Braga; *rev. técnica de* Claudia Cunha Campos *e* Ibrahim Eris. Rio de Janeiro: Campus; Ed. Da Universidade de São Paulo, 1980.

PINDYCK, Robert S. & RUBINFELD, Daniel L.. ***Microeconomia*.** São Paulo : Makron Books, 1994. 968 p..

RASMUSEN, Eric. *Games and Information*: an introduction to game theory . 2 ed. Cambridge : Blackwell, 1994. 478p..

SAMUELSON, Paul A.. The Pure Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, v. 36, p. 387-89, 1954.

SAMUELSON, Paul A.. Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, v. 37, p. 350-56, 1955.

TIROLE, J.. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge Mass : MIT Press, 1988.

VARIAN, Hal R.. *Microeconomics Analysis*. 3ª ed. New York : W. W. Norton & Company, 1992.

VARIAN, Hal R.. *Microeconomia: princípios básicos*. 5 ed. Rio de Janeiro : Campus, 2000. 756 p..

WHYNES, David K. & BOWLES, Roger A.. *A Teoria Econômica do Estado*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1982.